

INSTITUTO FEDERAL DE SANTA CATARINA

RHONY CRISTIAN DAUFENBACH

ANÁLISE DE VIGA PARA GERAÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA DEVIDO A
OSCILAÇÃO MECÂNICA DE UMA VIGA TRANSDUTORA PIEZOELÉTRICA

Joinville - SC

2021

RHONY CRISTIAN DAUFENBACH

ANÁLISE DE VIGA PARA GERAÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA DEVIDO A
OSCILAÇÃO MECÂNICA DE UMA VIGA TRANSDUTORA PIEZOELÉTRICA

Trabalho de conclusão de curso
apresentado ao curso de Engenharia
Mecânica do campus Joinville do Instituto
Federal de Santa Catarina para a obtenção
do diploma de Engenheiro Mecânico.

Orientador: Me. Eduardo Makoto Suzuki

Joinville

2021

Daufenbach, Rhony.

Análise de viga para geração de energia elétrica devido a oscilação mecânica de uma viga transdutora piezoelétrica / Rhony Daufenbach. – Joinville, SC, 2021. 50 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Santa Catarina, Curso de Bacharelado em Engenharia Mecânica, Joinville, 2021.

Orientador: Me. Eduardo Suzuki.

1. Viga Piezoelétrica. 2. Transdutor Piezoelétrico. 3. Vibração de Viga. I. Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Santa Catarina. II. Título.

RHONY CRISTIAN DAUFENBACH

ANÁLISE DE VIGA PARA GERAÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA DEVIDO A
OSCILAÇÃO MECÂNICA DE UMA VIGA TRANSDUTORA PIEZOELÉTRICA

Este trabalho foi julgado adequado para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica, pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina, e aprovado na sua forma final pela comissão avaliadora abaixo indicada.

Joinville, 04 de agosto de 2021.

Prof. Eduardo Makoto Suzuki, Me.
Orientador
Instituto Federal De Santa Catarina

Prof. Miguel Tobias Bahia, Dr.
Instituto Federal De Santa Catarina

Prof. Rubens Hesse, Dr.
Instituto Federal De Santa Catarina

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meu país Arlete e Osni pelo apoio contínuo durante a jornada acadêmica, aos amigos pelos momentos de colaboração e os de descontração, e aos professores pela dedicação aos estudantes mesmo diante de tempos difíceis.

“Estamos girando através do espaço infinito com uma velocidade inconcebível, tudo ao nosso redor está girando, tudo está se movendo, em toda parte há energia. Deve haver alguma maneira de nos aproveitarmos dessa energia de forma mais direta. Então, com a luz obtida do médium, com a força dela derivada, com todas as formas de energia obtidas sem esforço, do armazém para sempre inesgotável, a humanidade avançará a passos gigantes.”

(Nikola Tesla, 1891)

RESUMO

O objetivo deste trabalho é verificar o comportamento de uma viga piezoelétrica sob vibração harmônica em relação ao comportamento de potência elétrica versus tensões mecânicas em duas situações: (i) para o sistema estando conectado a um circuito resistivo, onde há amortecimento elétrico adicional para o sistema e (ii) em curto-circuito onde há apenas o amortecimento mecânico. Dessa forma foi verificado que a influência das tensões mecânicas atuantes no material, devido ao efeito piezoelétrico direto, devem ser o maior possível para a função de transdutor, caso (i), mas baixas o suficiente para evitar falha mecânica, caso (ii), e isto afeta significativamente o potencial de geração de energia da viga e é um ponto a ser considerado no projeto de um transdutor piezoelétrico.

Palavras-Chave: Viga Piezoelétrica. Transdutor Piezoelétrico. Vibração de Viga.

ABSTRACT

This study objective is to verify the behavior of a piezoelectric cantil ver beam under harmonic vibration to verify the behavior of electrical power output versus the mechanical stress for two cases: (i) for the system connected to a resistive circuit, which provides additional electrical damping for the system and (ii) connected for a short-circuit where there is only the mechanical damping. It was verified that mechanical stress that the material is subjected, according to the direct piezoel ctric effect, must be as high as possible for the transducer function, case (i), at the same time it should be low enough to avoid mechanical failure, case (ii), and this affects considerably the energy generation potential of the beam and it is important to be considered in a piezoelectric transducer project.

Keywords: Piezoelectric Beam. Piezoelectric Transducer. Vibration of Beam.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Estrutura molecular cristal piezoelétrico.....	14
Figura 2 – Polarização dos cristais no material durante processo de fabricação.....	15
Figura 3 – Relação tensão mecânica com diferença de potencial elétrico.....	16
Figura 4 – Esquema de um transdutor piezoelétrico.....	17
Figura 5 – Carga depositada em um transdutor piezoelétrico.....	20
Figura 6 – Transdutor piezoelétrico com circuito aberto sob força aplicada na direção 1.....	21
Figura 7 – Transdutor piezoelétrico sujeito a carga aplicada.....	22
Figura 8 – Conversos de vibração genérico.....	25
Figura 9 - Modos de atuação piezoelétrica.....	28
Figura 10 - Modelo de viga piezoelétrica.....	28
Figura 11 – Viga piezoelétrica com duas camadas em paralelo e em série.....	28
Figura 12 – Representação em diagrama eletromecânico de transdutor piezoelétrico.....	29
Figura 13 – Dimensões de comprimento viga com massa na ponta.....	30
Figura 14 – Esquema viga analisada.....	32
Figura 15 – Esquema elétrico dos modelos.....	33
Figura 16 – Modelos A, B, C e D.....	34
Figura 17 – Condição de contorno de uma viga piezoelétrica para teste de equação.....	39
Figura 18 – Resposta para a condição de contorno de teste da função potência.....	39
Figura 19 – Resposta de potência Modelo A.....	40
Figura 20 – Resposta de potência Modelo B.....	41
Figura 21 – Resposta de potência Modelo C.....	41
Figura 22 – Resposta de potência Modelo D.....	42
Figura 23 – Gráfico de resultados.....	44
Figura 24 – Seção de viga composta transformada.....	47

LISTA DE SÍMBOLOS

σ	vetor tensão normal (N/m ²)
ε	vetor deformação (m/m)
E	vetor campo elétrico aplicado (V/m)
e	permissividade elétrica (F/m)
d	matriz de constantes de deformação piezoelétrica (m/V)
S	matriz de coeficiente de flexibilidade (m ² /N)
D	vetor de deslocamento elétrico (C/m ²)
g	matriz de constante piezoelétrica (m ² /C)
β	componente de impermitividade (m/F)
q	carga elétrica (C)
F	força (N)
V	tensão elétrica (V)
g_{ij}	constante piezoelétrica (m ² /C)
k	coeficiente de acoplamento piezoelétrico
C_p	capacitância (F)
m	massa (kg)
c	coeficiente de amortecimento (kg/s)
K	constante de mola/constante de rigidez (N/m)
b_m	coeficiente de amortecimento mecânico (kg/s)
b_e	coeficiente de amortecimento elétrico (kg/s)
Y	amplitude de deslocamento de excitação do sistema (m)
ζ_m	razão de amortecimento mecânico
ζ_e	razão de amortecimento elétrico
ζ_T	razão de amortecimento total, $\zeta_m + \zeta_e$.
ω_n	frequência natural angular de vibração (rad/s)
ω	frequência da oscilação imposta ao sistema (rad/s)
A_{entra}	amplitude de aceleração da vibração do sistema (m/s ²)
P	potência (Watts)
b^*	constante geométrica da viga (m ⁻¹)
L	comprimento efetivo da viga (m)
L_m	comprimento massa da ponta
L_e	comprimento do eletrodo (m)

- I_x momento de inércia sobre x (m^4)
- n_t razão entre modulo de elasticidade do material da camada central e do material piezoelétrico $n_t = E_c / E_p$
- t_p espessura camada piezoelétrica (m)
- t_a espessura camada metálica central (m)
- t_t espessura total da viga $2t_p + t_c$ (m)
- f_n frequência natural de vibração (Hertz)

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	12
1.1. Objetivos.....	13
1.1.1. Objetivo geral.....	13
1.1.2. Objetivos específicos	13
2. REVISÃO DA LITERATURA.....	14
2.1. Princípio de funcionamento de material piezoelétrico	14
2.2. Conversão de energia por vibração de transdutor piezoelétrico	25
3. DESENVOLVIMENTO	32
3.1. Objetivo.....	32
3.2. Método	32
3.3. Resultados.....	40
4. CONCLUSÃO.....	43
REFERÊNCIAS.....	45
ANEXO A – MOMENTO DE INÉRCIA DE VIGA COMPOSTA	47
ANEXO B – RIGIDEZ K DE VIGA ENGASTADA.....	49

1. INTRODUÇÃO

Energia elétrica é algo que está presente em praticamente todos os aspectos da vida moderna humana. Em uma casa isso é particularmente visível, devido a necessidade de armazenar comida, cozinhar, limpeza, entretenimento, conforto e em alguns casos segurança e saúde. A energia elétrica atualmente utilizada na rede doméstica no Brasil é proveniente de fontes de grande porte de geração como usinas hidrelétricas, que representam 62,5% da matriz energética nacional (ANEEL, 2020), campos de geração eólica 9,9% (ANEEL, 2020), usinas a gás natural que representam 10,5% da matriz energética (ANEEL, 2020) entre outras. Apesar de a matriz elétrica brasileira possuir maior parte da geração proveniente de hidroelétricas (ANEEL, 2020), o cenário global é um pouco diferente como aponta o IEA (2020), cerca de 63% da produção global de energia elétrica é proveniente de métodos não sustentáveis e que emitem gases nocivos na atmosfera, como a queima de carvão, gás natural e derivado do petróleo. Como ressaltado por Kühn bach et al. (2020), sistemas descentralizados de geração de energia, sejam residenciais individualizados ou pequenas plantas solares ou eólicas, estão sendo cada vez mais populares no continente europeu, e um mundo mais sustentável tende a seguir esse caminho. Materiais com propriedades piezoelétricas são uma alternativa, como método complementar de geração de energia. Com o uso de material piezoelétrico, como estudado por Miao e Jia (2014), é possível transformar energia de impacto da chuva em superfícies do material diretamente ou indiretamente. Papagiannakis et al. (2016) também propõem o uso de células piezoelétricas para a conversão de energia de vibração de estradas e pontes com grande fluxo de veículos em energia elétrica. Visto que a capacidade da célula piezoelétrica de converter energia mecânica em elétrica é diretamente proporcional as tensões mecânicas atuantes no material, como descrito pela IEEE (1987) e Ikeda (1996), um ponto a se observar, no entanto, é o comportamento mecânico deste para as situações a que ele pode ser submetido, visto que o material piezoelétrico ainda é um material de valor relativamente alto comercialmente, é importante a preservação da integridade. Isto é analisado neste trabalho, a fim de entender a relação entre potência e tensões mecânicas atuando no material, e consequências possíveis. Quatro modelos de pequenas vigas transdutoras com massa na ponta são especificados, variando o comprimento e largura destas mantendo a área superior (área de eletrodo) e volume de material. Estas então são

avaliadas oscilando harmonicamente por uma força externa, e a resposta de potência e tensões atuantes no material são avaliadas.

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo geral

Avaliar o comportamento da tensão mecânica versus potência de resposta elétrica em uma viga piezoelétrica durante vibração harmônica para o sistema conectado a um circuito resistivo e para o sistema conectado em curto-circuito.

1.1.2. Objetivos específicos

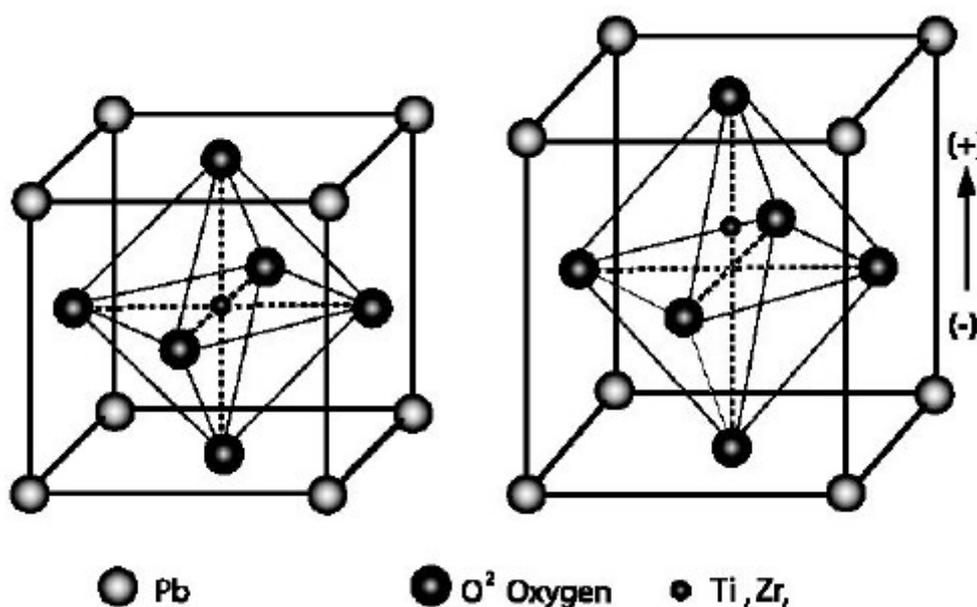
- a) Modelagem mecânica do sistema
- b) Levantamento de parâmetros do sistema e materiais
- c) Modelagem da viga piezoelétrica
- d) Verificar a influência dimensional na resposta de potência elétrica e as tensões mecânicas máximas respectivas para o sistema conectado a circuito resistivo e em curto-circuito.

2. REVISÃO DA LITERATURA

2.1. Princípio de funcionamento de material piezoelétrico

Um material piezoelétrico é um material transdutor, ou seja, possui a capacidade de gerar potencial elétrico quando submetido a tensões mecânicas. Este é encontrado na natureza na forma de cristais como é o caso do quartzo e até mesmo na madeira, na sacarose, porém tais materiais tem estas propriedades de forma muito reduzida. Na atualidade temos materiais piezoelétricos feitos sinteticamente e que apresentam estas propriedades de forma bem superior. Formas sintéticas foram criadas com propriedades melhores, sendo estas como polímeros, cerâmicas e cristais. O material atualmente mais utilizado de cada tipo são, PVDF ou fluoreto de polivinilideno, PZT ou titanato zirconato de chumbo e $\text{Pb}(\text{Mg}_{1/3}\text{Nb}_{2/3})\text{O}_3$ (PMN) (WU; BAO; WANG, 2021). Respectivamente, estes são amplamente aplicados em sensores de contato e recentemente tem sido alvo de estudos na área de geração de energia (SCIENCING, 2020). Cada cristal é composto de pequenos íons metálicos tetravalentes dispostos dentro de um íon metálico maior divalente e O_2 , Figura 1.

Figura 1 – Estrutura molecular cristal piezoelétrico

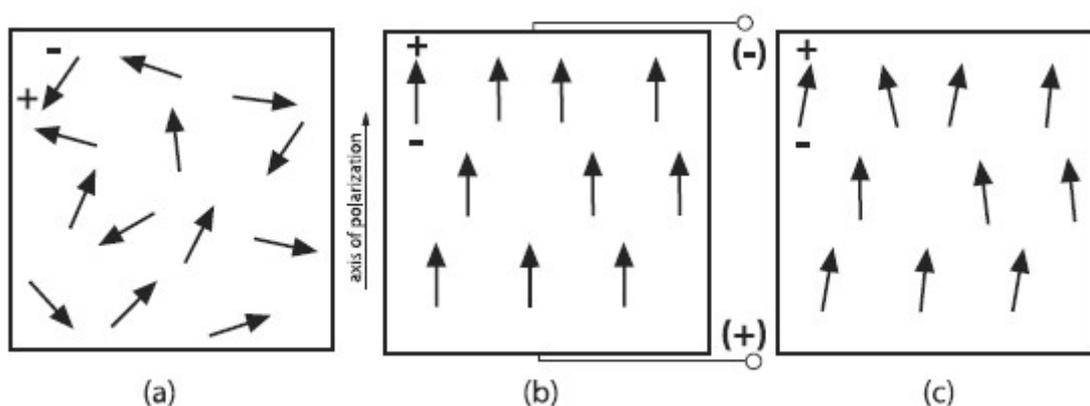


Fonte: (IKEDA, 1996)

O material piezoelétrico é fabricado aquecendo o material base a temperaturas ligeiramente inferiores ao ponto de Curie (temperatura na qual os dipolos do material deixam de ser ordenados e se tornam livres e desordenados, podendo ser orientados devido a um campo elétrico externo), e então este é submetido a um campo elétrico de corrente direta alto, com isso o material tende a expandir na direção do campo elétrico e os cristais ficam polarizados nesta direção, Figura 2 (b). Após a remoção do campo elétrico, os cristais ficam travados de forma quase totalmente polarizada, resultando em um material final com polarização permanente, Figura 2 (c) (IKEDA, 1996).

Dentre os tipos de material piezoelétricos, os cristalinos são os que apresentam melhores propriedades piezoelétricas. Um pedaço deste material de largura e comprimento de 5mm e altura de 10mm, quando submetido a uma força de 10 Newtons, pode gerar um potencial elétrico acima 100 volts. A maior parte dos materiais piezoelétricos tem reações piezoelétricas rápidas, podendo converter energia mecânica em corrente alternada de forma fácil, como em casos que o material é submetido a vibrações. (WU; BAO; WANG, 2021).

Figura 2 – Polarização dos cristais no material durante processo de fabricação.

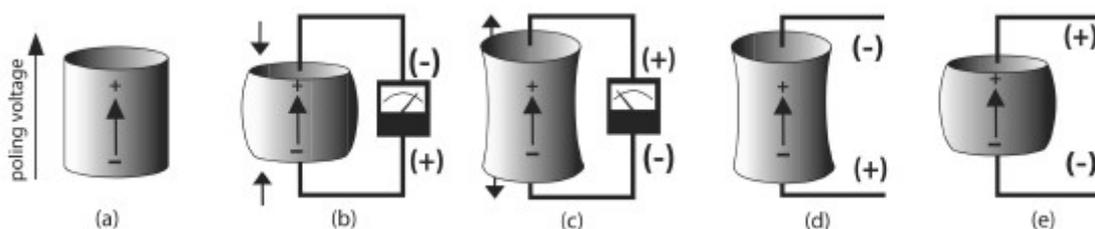


Fonte: (IKEDA, 1996)

Uma das principais propriedades do material piezoelétrico é a capacidade de gerar diferença de potencial elétrico ao longo do corpo devido a ação de tensão mecânica, ou de se deformar devido a uma tensão elétrica aplicada. Tensão mecânica de compressão ou tração mudam o momento de dipolo do material, caracterizando tensão elétrica (IKEDA, 1996). Esse efeito só é observado em cristais que não possuem um centro de simetria (SCIENCING, 2020). Compressão na direção de

polarização do material ou tração perpendicular a direção de polarização do material gera diferença de potencial de mesma polaridade que a polaridade do material, Figura 3 (b), enquanto tração na direção de polarização e compressão na direção perpendicular a polarização gera diferença de potencial oposta a polaridade do material, Figura 3 (c).

Figura 3 – Relação tensão mecânica com diferença de potencial elétrico



Fonte: (IKEDA, 1996)

Atuando desta forma, o material está sendo usado como Sensor, onde solicitações mecânicas impostas ao material induzem a geração de energia elétrica no material. Este também pode funcionar como atuador, onde o material sofre deformações mecânicas devido a ação de tensão elétrica induzida sobre ele.

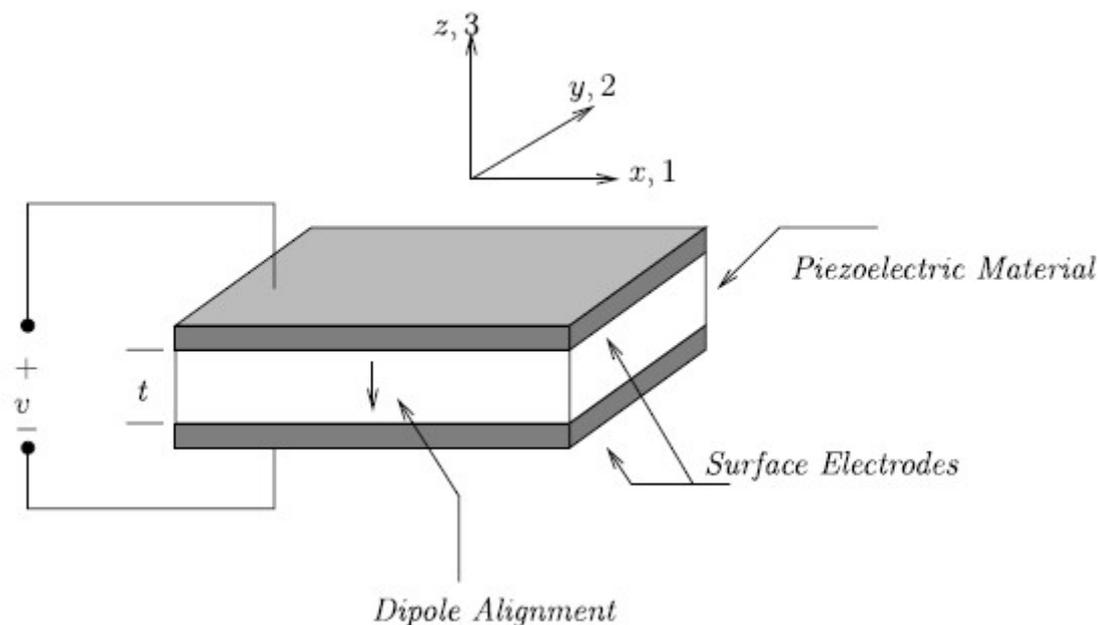
Como atuador, se uma voltagem de mesma polaridade que a polaridade do material é aplicada a ele, este irá esticar, e o seu diâmetro irá diminuir, como na Figura 3 (d). No caso oposto, em que uma voltagem de polaridade oposta à do material é aplicada, este irá contrair na direção de polarização e seu diâmetro irá expandir. Se uma corrente alternada for aplicada ao material, este irá contrair e expandir, ciclicamente.

Valores para a tensão mecânica aplicada versus a tensão elétrica gerada, e vice e versa, são linearmente proporcionais até certos níveis de tensão mecânica. Isso também depende do tipo de material adotado. Para fins de análise, é considerado que o material piezoelétrico possui comportamento linear quanto a proporcionalidade tensão versus voltagem, como recomendado pela IEEE (1987).

Como visto, quando solicitado mecanicamente, o material piezoelétrico se torna eletricamente polarizado, gerando carga elétrica na sua superfície que pode, com a adição de eletrodos, ser utilizada, isto é denominado efeito piezoelétrico direto Figura 4. ROUNDY (2003) explica que o material piezoelétrico não é condutor, cargas

elétricas se acumulam na superfície, e só podem se coletadas com a superfície coberta por eletrodo.

Figura 4 – Esquema de um transdutor piezoelétrico



Fonte: IKEDA (1996)

Assumindo o índice 1 para a direção do eixo x, 2 para a direção do eixo y e 3 para a direção do eixo z, e $i, j = 1, 2, \dots, 6$ e $m, k = 1, 2, 3$ se referindo a estas direções no material, sendo 4, 5 e 6 os planos de cisalhamento normais aos eixos x, y e z respectivamente, as equações constituintes para o efeito piezoelétrico, segundo IKEDA (1996) e IEEE (1987) são:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{S}_{ij}^E \boldsymbol{\sigma}_j + \mathbf{d}_{mi} \mathbf{E}_m \quad (1)$$

$$\mathbf{D}_m = \mathbf{d}_{mi} \boldsymbol{\sigma}_i + \mathbf{e}_{ik}^\sigma \mathbf{E}_k \quad (2)$$

Estas podem ser rescritas na forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{S}_{ij}^D \boldsymbol{\sigma}_j + \mathbf{g}_{mi} \mathbf{D}_m \quad (3)$$

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{g}_{mi} \boldsymbol{\sigma}_i + \boldsymbol{\beta}_{ik}^\sigma \mathbf{D}_k \quad (4)$$

onde:

σ = vetor tensão normal (N/m^2)

ε = vetor deformação (m/m)

E = vetor campo elétrico aplicado (V/m)

e = permissividade elétrica (F/m)

d = matriz de constantes de deformação piezoelétrica (m/V)

S = matriz de coeficiente de flexibilidade ($\frac{m^2}{N}$) ou (E_p^{-1})

D = vetor de deslocamento elétrico (C/m^2)

g = de constante piezoelétrica (m^2/C)

β = componente de impermitividade (m/F)

Os sobrescritos D, E e σ , significam que as medidas foram feitas a deslocamento elétrico constante, constante campo elétrico e tensão mecânica constante, respectivamente (IKEDA, 1996). Equações (1) e (3) são aplicáveis ao material atuando como atuador eletromecânico, enquanto as equações (2) e (4) são para sensor.

Desdobrando a Equação (1) na forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} \\ d_{15} & d_{25} & d_{35} \\ d_{16} & d_{26} & d_{36} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

E para a Equação (2), tem-se:

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11}^\sigma & e_{12}^\sigma & e_{13}^\sigma \\ e_{21}^\sigma & e_{22}^\sigma & e_{23}^\sigma \\ e_{31}^\sigma & e_{32}^\sigma & e_{33}^\sigma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Segundo IKEDA (1996), assumindo que o material piezoelétrico é polarizado na direção 3, e assumindo que este é transversalmente isotrópico, as seguintes relações são válidas:

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= S_{22} \\
 S_{13} &= S_{31} = S_{23} = S_{32} \\
 S_{12} &= S_{21} \\
 S_{44} &= S_{55} \\
 S_{66} &= 2(S_{11} - S_{12})
 \end{aligned} \quad (7)$$

e os coeficientes de deformação piezoelétrico não nulos,

$$\begin{aligned}
 d_{31} &= d_{32} \\
 d_{15} &= d_{24}
 \end{aligned} \quad (8)$$

e as constantes dielétricas não nulas são $e_{11}^\sigma = e_{22}^\sigma$ e e_{33}^σ , assim as Equações (5) e (6) podem ser resumidas como:

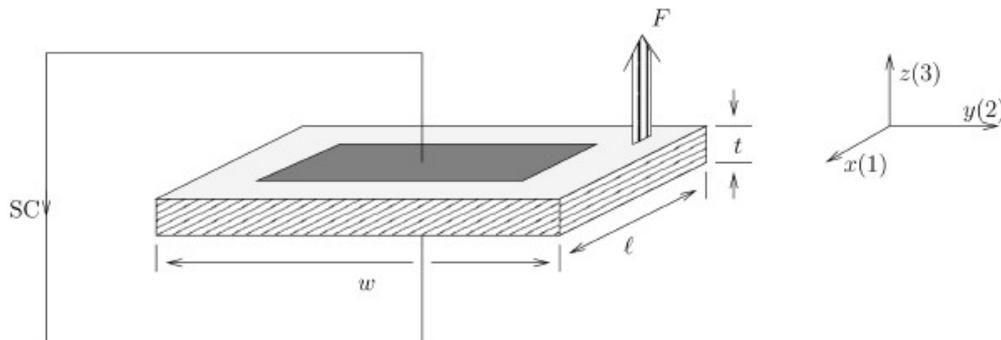
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{15} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11}^\sigma & 0 & 0 \\ 0 & e_{11}^\sigma & 0 \\ 0 & 0 & e_{33}^\sigma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Quanto aos coeficientes envolvidos nas relações, IKEDA (1996) descreve previamente estes como segue.

Constante piezoelétrica d_{ij} – se refere a taxa de deformação no eixo j devido a um campo elétrico aplicado no eixo i enquanto todas as tensões mecânicas externas são mantidas constantes. Sendo V uma tensão elétrica aplicada ao modelo da Figura 5, tem-se o campo elétrico E , que deforma o material em ε_1 , tem-se (IKEDA, 1996):

Figura 5 – Carga depositada em um transdutor piezoelétrico



Fonte: IKEDA (1996)

$$E = \frac{V}{t} \quad (11)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l}{l} \quad (12)$$

$$\Delta l = \frac{d_{31} V l}{t} \quad (13)$$

Outra interpretação descrita por Ikeda (1996), se refere ao efeito inverso, sendo d_{ij} a razão entre a carga que flui entre os eletrodos perpendicular a direção j pela força aplicada na direção i , sendo F uma força aplicada na direção 3 do elemento da Figura 4, tem-se

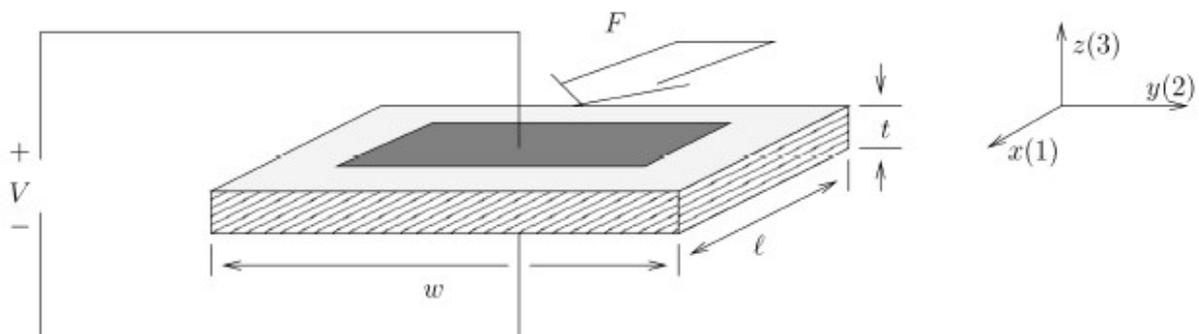
$$\sigma_3 = \frac{F}{lw} \quad (14)$$

e para carga elétrica q fluindo através do sistema, como consequência,

$$q = d_{33} F \quad (15)$$

Constante piezoelétrica g_{ij} – segundo Ikeda (1996) significa o campo elétrico desenvolvido ao longo do eixo i quando o material é tensionado mecanicamente na direção j . Considerando uma força F na direção 1, Figura 6, tem-se a Equação (16).

Figura 6 – Transdutor piezoelétrico com circuito aberto sob força aplicada na direção 1

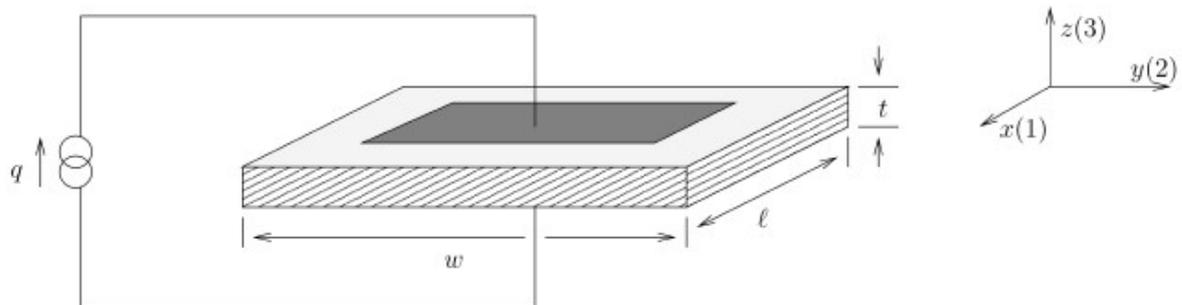


Fonte: IKEDA (1996)

$$V = \frac{g_{31}F}{w} \quad (16)$$

Pode ser interpretado também como a razão de deformação na direção j devido a carga por unidade de área acumulada nos eletrodos normais a direção i , Figura 7, tendo assim a Equação (17).

Figura 7 – Transdutor piezoelétrico sujeito a carga aplicada



Fonte: IKEDA (1996)

$$\Delta l = \frac{g_{31}Q}{w} \quad (17)$$

Coefficiente de rigidez do material S_{ij} – segundo Ikeda (1996) significa a razão entre a deformação na direção i a a tensão na direção j , visto que não há mudança de tensão nas outras duas direções. O sobrescrito E em S_{ij}^E significa que a propriedade foi medida com sistema em curto-circuito, sobrescrito D em S_{ij}^D significa que a propriedade foi medida para o sistema com eletrodos em circuito aberto. A aplicação de tensão mecânica causa uma resposta elétrica que pode aumentar a deformação resultante, é natural esperar que S_{ij}^E seja menor que S_{ij}^D , um sistema de transdutor piezoelétrico em curto-circuito S_{ij}^E tem um módulo de Young de elasticidade menor que o mesmo em circuito aberto S_{ij}^D . Em suma, S_{ij} se relaciona com o módulo de Young do material pela Equação (18).

$$S_{ij} = \frac{1}{E_{ij}} \quad (18)$$

Coefficiente dielétrico e_{ij} – segundo Ikeda (1996) significa a carga elétrica por unidade de área na direção i devido a um campo elétrico na direção j . Na maioria dos materiais piezoelétricos, um campo elétrico aplicado na direção j somente causa deslocamento elétrico nesta mesma direção.

Coefficiente de acoplamento k_{ij} – segundo Ikeda (1996), representa a habilidade de um material piezoelétrico de transformar energia elétrica em energia mecânica e vice e versa. Sendo estas funções aplicadas em sensores e atuadores. Os índices ij indicam que tensão ou deformação estão na direção j e os eletrodos normais a direção i . Uma forma de medir k_{ij} é aplicar uma força na direção 3 como na Figura 5, e medir a deformação, e então tem se o trabalho mecânico,

$$W_M = \frac{F \Delta_z}{2} \quad (19)$$

devido ao efeito piezoelétrico, cargas vão se acumular nos eletrodos,

$$W_E = \frac{Q^2}{2C_p} \quad (20)$$

assim,

$$k_{33} = \sqrt{\frac{W_E}{W_M}} = \frac{Q}{\sqrt{F \Delta_z C_p}} \quad (21)$$

Sendo E_p o modulo de elasticidade do material piezoelétrico, k_{ij} pode ser escrito como,

$$k_{ij}^2 = \frac{d_{ij}^2}{S_{ij}^E e_{ij}^\sigma} = g_{ij} d_{ij} E_p \quad (22)$$

Quando uma força é aplicada a um transdutor piezoelétrico, este apresenta rigidez diferente para o caso de circuito aberto ou fechado nos eletrodos. Se está em curto-circuito (fechado), onde os elétrons podem fluir de um eletrodo ao outro livremente, o sistema apresenta menor rigidez do que se estivesse em circuito aberto, onde os eletrodos não estão conectados e os eletros não podem fluir de um ao outro e ficam acumulados no eletrodo. Sendo K_{SC} a rigidez com o sistema em curto-circuito e K_{OC} a rigidez com o sistema em circuito aberto, IKEDA (1996) relaciona estas com k pela Equação (23).

$$\frac{K_{OC}}{K_{SC}} = \frac{1}{1 - k^2} \quad (23)$$

Segundo IKEDA (1996), quando um transdutor piezoelétrico é tensionado mecanicamente, esse gera uma voltagem, sendo este o fenômeno governado pelo efeito piezoelétrico direto. Se um transdutor piezo elétrico é submetido a um campo de tensão mecânica, e o campo elétrico externo aplicado é nulo, o deslocamento elétrico no transdutor se dá pela Equação (24),

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{31} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (24)$$

, sendo a área diferencial do eletrodo nas 3 direções $n = 1,2,3$ igual a dA_n , a carga gerada pode ser dada pela Equação (25).

$$q = \iint [D_1 \quad D_2 \quad D_3] \begin{bmatrix} dA_1 \\ dA_2 \\ dA_3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Sendo C_p a capacitância do transdutor descrita na Equação (26), a voltagem gerada está relacionada com a carga pela Equação (27).

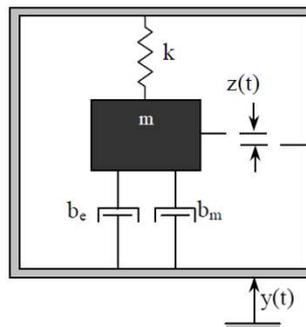
$$C_p = \frac{lwe_{ij}^{\sigma}}{t} \quad (26)$$

$$V_p = \frac{q}{C_p} \quad (27)$$

2.2. Conversão de energia por vibração de transdutor piezoelétrico

Conversão de energia de vibração em energia elétrica é um tópico que independe do mecanismo utilizado. Um modelo é descrito por Williams e Yates (1996), e está mostrado na Figura 8.

Figura 8 – Conversor de vibração genérico



Fonte: ROUNDY (2003)

Como pode ser notado, tem-se dois componentes de amortecimento: um mecânico e um elétrico, que é o responsável pela energia convertida para a qualidade elétrica. Como descrito por Williams e Yates (1996), a Equação (28) rege tal movimento vibracional.

$$m \cdot \ddot{z}(t) + c \cdot \dot{z}(t) + K \cdot z(t) = -m \cdot \ddot{y}(t) \quad (28)$$

onde:

z = deflexão da massa vs mola (m)

y = deslocamento induzido ao sistema/base (m)

m = massa (kg)

$c =$ coeficiente de amortecimento

$K =$ constante de mola (N/m)

A força na massa é igual a força no sistema massa mola sendo dada pela Equação (29),

$$F = -m\ddot{y}(t) \quad (29)$$

e a potência instantânea transferida a massa é então representada pela Equação (30), (WILLIAMS; YATES, 1996).

$$p(t) = -m\ddot{y}(t) \cdot [\dot{y}(t) + \dot{z}(t)] \quad (30)$$

Visto que a potência elétrica é dada pela porção de energia removida do sistema pelo amortecimento elétrico, ROUNDY (2003) propõe a partir da Equação (28) a Equação (31), considerando o amortecimento elétrico e mecânico. Como mostrado por ROUNDY (2003), sendo v a velocidade, a potência elétrica se dá pela Equação (32), visto que $v = \dot{z}$, resulta na Equação (33).

$$m \cdot \ddot{z}(t) + (b_m + b_e) \cdot \dot{z}(t) + K \cdot z(t) = -m \cdot \ddot{y}(t) \quad (31)$$

onde:

$b_m =$ coeficiente de amortecimento mecânico

$b_e =$ coeficiente de amortecimento elétrico

$$P = b_e \int_0^v v \, dv \quad (32)$$

$$P = \frac{b_e \dot{z}^2}{2} \quad (33)$$

ROUNDY (2003) deriva a Equação (34), como sendo a potência elétrica devido ao sistema vibratório genérico da Figura 8.

$$|P| = \frac{m \cdot \zeta_e \cdot w_n \cdot w^2 \left(\frac{w}{w_n}\right)^3 Y^2}{\left(2\zeta_T \frac{w}{w_n}\right) + \left(1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2\right)^2} \quad (34)$$

onde:

Y = amplitude de deslocamento de excitação do sistema (m)

ζ_T = razão de amortecimento total, $\zeta_e + \zeta_m$

w_n = frequência natural do sistema (rad/s)

w = frequência da oscilação imposta ao sistema (rad/s)

Para o sistema configurado de tal forma que a frequência de oscilação externa seja igual a frequência de oscilação natural do sistema, $w = w_n$, segundo ROUNDY (2003) a Equação (34) pode ser reduzida na Equação (35).

$$|P| = \frac{m \cdot \zeta_e \cdot A_{entra}^2}{4w \cdot \zeta_T^2} \quad (35)$$

onde:

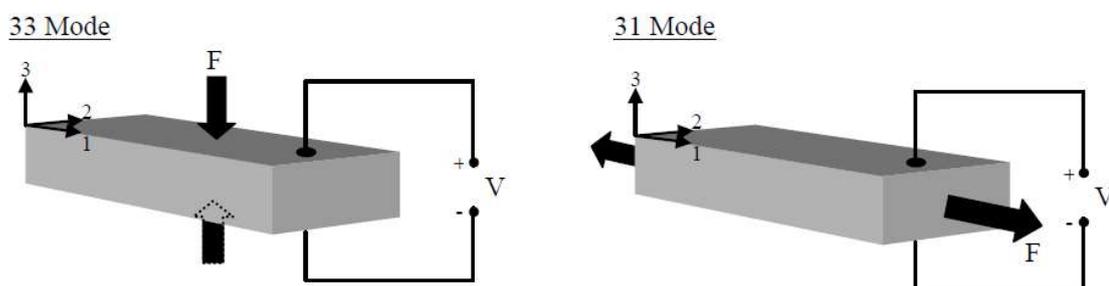
A_{entra} = Amplitude de aceleração imposta ao sistema

ROUNDY (2003) especifica que ζ_e está relacionado com o circuito elétrico associado ao transdutor vibracional, que pode ser simples como uma resistência, ou complexo e com diversos componentes.

A Figura 9 mostra os dois modos de operação do material piezoelétrico, a esquerda no modo 33, o material é submetido a tensão mecânica na mesma direção que a sua direção de polarização, e a direita no modo 31, o material é submetido a tensão mecânica na direção perpendicular a sua direção de polarização. O modo 31 é normalmente usado na forma construtiva de viga em flexão, o que proporciona maiores deformações no material para menores esforços aplicados que o modo 33. Quando usado na forma de viga, esta é composta de duas ou mais camadas de material piezoelétrico engastados entre si, como na Figura 10, algumas vezes com uma placa metálica entre elas. Quando a viga é flexionada, uma metade é submetida a tração e a outra a compressão. Se as camadas piezoelétricas estão polarizadas na

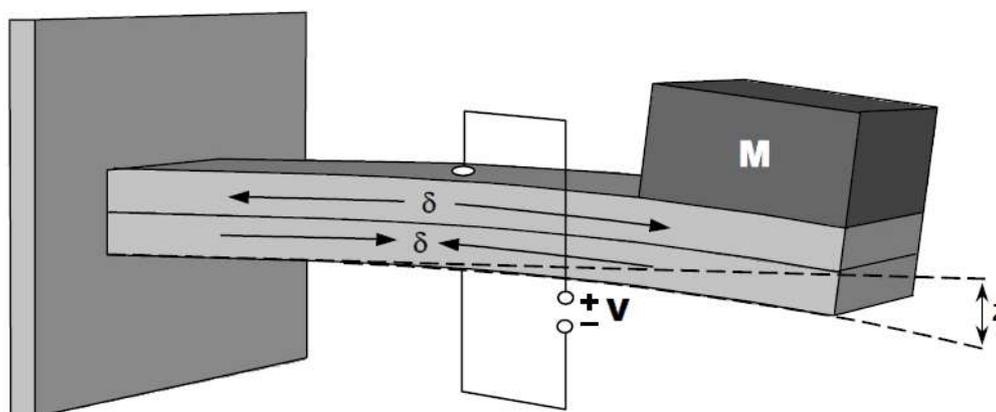
mesma direção, e os eletrodos são conectados apropriadamente, tem-se uma conexão em paralelo, e a corrente dos elementos piezoelétricos é somada. Se estiverem polarizadas de forma invertida, tem-se uma conexão em série, e a tensão é dobrada, e na teoria, a orientação de polarização e números de camadas, afetam apenas a razão entre tensão elétrica e corrente elétrica (ROUNDY, 2003). As camadas em paralelo e em série podem ser vistas na Figura 11.

Figura 9 - Modos de atuação piezoelétrica



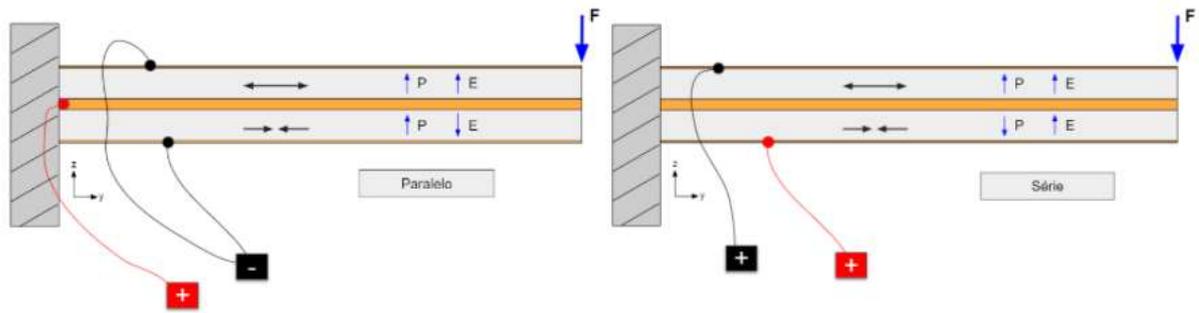
Fonte: (ROUNDY, 2003)

Figura 10 - Modelo de viga piezoelétrica



Fonte: (ROUNDY, 2003)

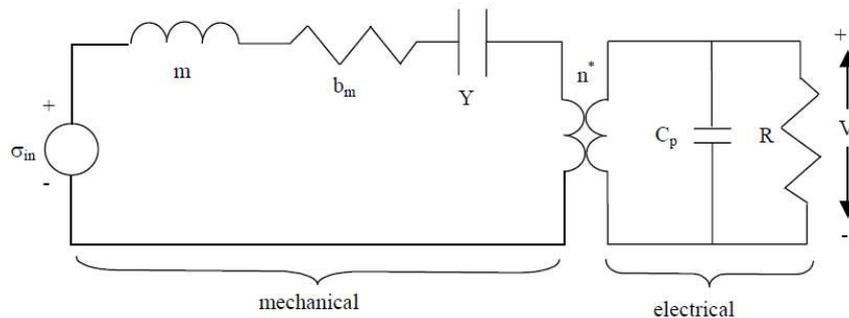
Figura 11 – Viga piezoelétrica com duas camadas em paralelo e em série



Fonte: O Autor

Para o desenvolvimento de estudos sobre transdutores piezoelétricos, ROUNDY (2003) representa o sistema mecânico e elétrico em um diagrama, como na Figura 12. A esquerda é representada uma analogia elétrica equivalente da parte mecânica, onde a massa (m) da ponta é representado por um indutor, o amortecimento mecânico do sistema (b_m) é representado por uma resistência e a rigidez mecânica (Y) é representada por um capacitor.

Figura 12 – Representação em diagrama eletromecânico de transdutor piezoelétrico



Fonte: (ROUNDY, 2003)

O fator de amortecimento elétrico é descrito por ROUNDY (2003) segundo a Equação (36). Este nota que o sistema oferece maior resposta de potência quando o amortecimento elétrico tem o mesmo valor que o amortecimento mecânico ζ . Assim a resistência ótima também pode ser obtida igualando ζ_e a ζ .

$$\zeta_e = \frac{wk^2}{2\sqrt{w^2 + \frac{1}{(RC_p)^2}}} \quad (36)$$

onde:

$R = \text{resistencia do sistema elétrico (Ohm)}$

$C_p = \text{capacitancia do transdutor piezoelétrico (F)}$

Assim, ROUNDY (2003) estudou o comportamento de um transdutor piezoelétrico excitado harmonicamente, e analiticamente para a frequência de oscilação igual a frequência natural do sistema não amortecida $w = w_n$, propôs a Equação (37) que representa a potência elétrica P de saída de uma viga transdutora piezoelétrica, com eletrodos conectados a um circuito composto por uma resistência R . A resistência ótima, é dada pela Equação (38).

$$P = \frac{1}{w^2} \cdot \frac{RC^2 \left(\frac{Y_c d t_p b^*}{\varepsilon} \right)^2}{(4\zeta_m^2 + k^4)(RCw)^2 + 4\zeta_m k^2 (RCw) + 2\zeta_m^2} A_{entrada}^2 \quad (37)$$

$$R_o = \frac{1}{wC} \frac{2\zeta_m}{\sqrt{4\zeta_m^2 + k^4}} \quad (38)$$

onde:

$w = \text{frequência natural do sistema (rad/s)}$

$k = \text{coeficiente de acoplamento piezoelétrico}$

$A_{entra} = \text{magnitude da aceleração imposta ao sistema (m/s}^2\text{)}$

$t_p = \text{espessura da lamina piezoelétrica individual (m)}$

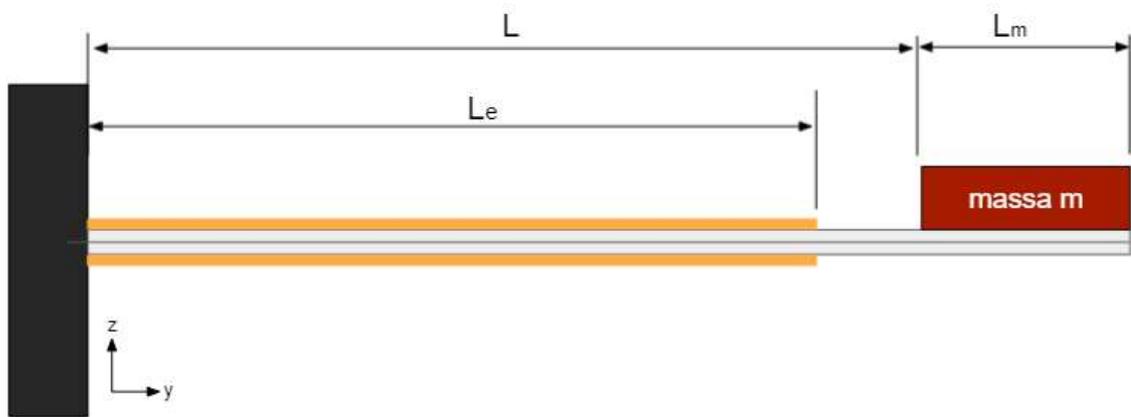
$b^* = \text{constante geométrica que relaciona deformação média com a força na ponta livre da viga (m}^{-1}\text{)}$

$\zeta_m = \text{coeficiente de amortecimento mecânico}$

$\varepsilon = \text{permissividade elétrica do material piezoelétrico (F/m)}$

O parâmetro geométrico que relaciona deformação média com a força atuante na ponta livre da viga piezoelétrica b^* referido na Equação (37) é definido por ROUNDY (2003) segundo a Equação (39).

Figura 13 – Dimensões de comprimento viga com massa na ponta



Fonte: O Autor

$$b^* = \frac{3b(2L + L_m - L_e)}{L^2 \left(2L + \frac{3L_m}{2}\right)} \quad (39)$$

onde:

b = distancia vertical entre centro da camada metálica central da viga e o centro da camada piezoelétrica (m)

L = comprimento efetivo da viga (m)

L_m = comprimento massa da ponta (m)

L_e = comprimento do eletrodo (m)

3. DESENVOLVIMENTO

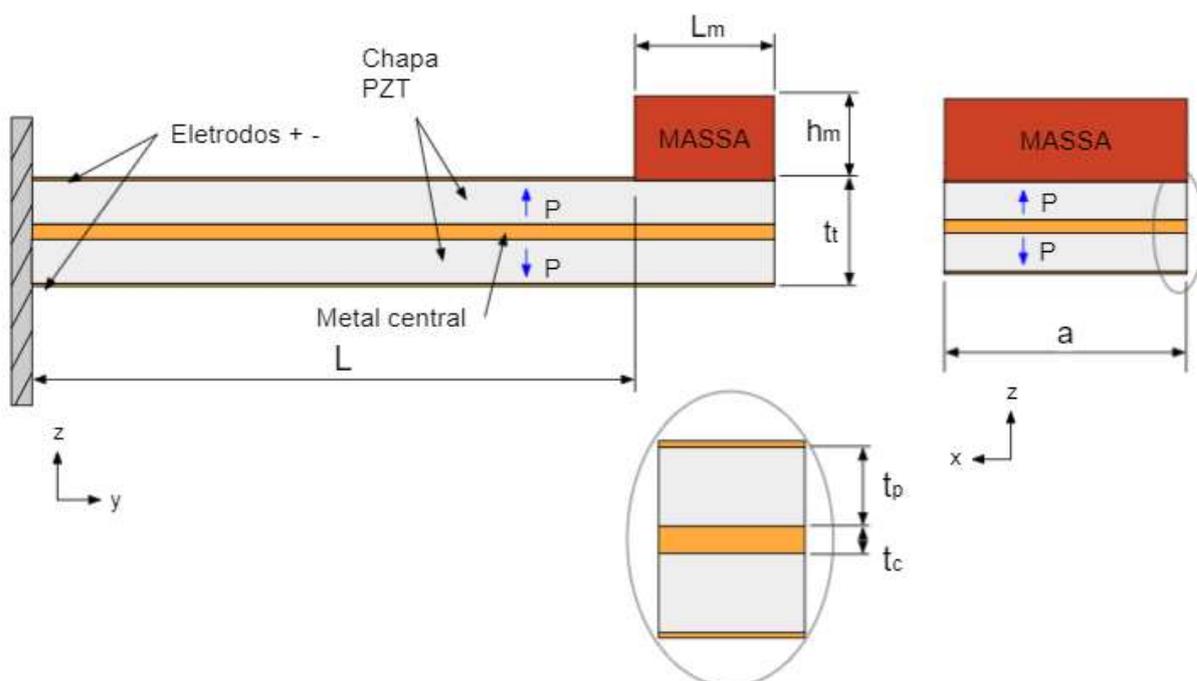
3.1. Objetivo

Esta análise tem como objetivo avaliar a diferença na resposta mecânica e elétrica de vigas piezoelétricas excitadas harmonicamente para diferentes larguras e comprimentos, considerando estas estando em circuito com resistência elétrica determinada e em curto-circuito, e como estes cenários afetam o sistema mecanicamente.

3.2. Método

O modelo de viga transdutora da Figura 14 é considerado, trata-se de uma viga de dupla camada piezoelétrica, com uma camada em cobre central, com uma massa m na ponta. As duas camadas piezoelétricas são polarizadas de forma invertida, caracterizando um esquema transdutor em série.

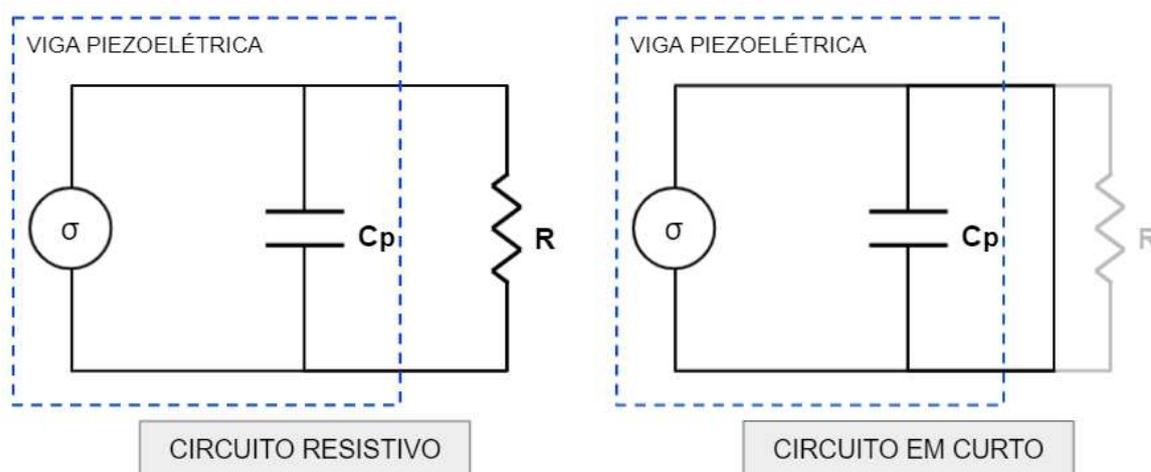
Figura 14 – Esquema viga analisada



Fonte: O Autor

O sistema elétrico associado é considerado como sendo o semelhante ao da Figura 12, mostrado de forma simplificada na Figura 15, com apenas uma resistência equivalente a esquerda, e o caso de curto-circuito a direita.

Figura 15 – Esquema elétrico dos modelos



Fonte: O Autor

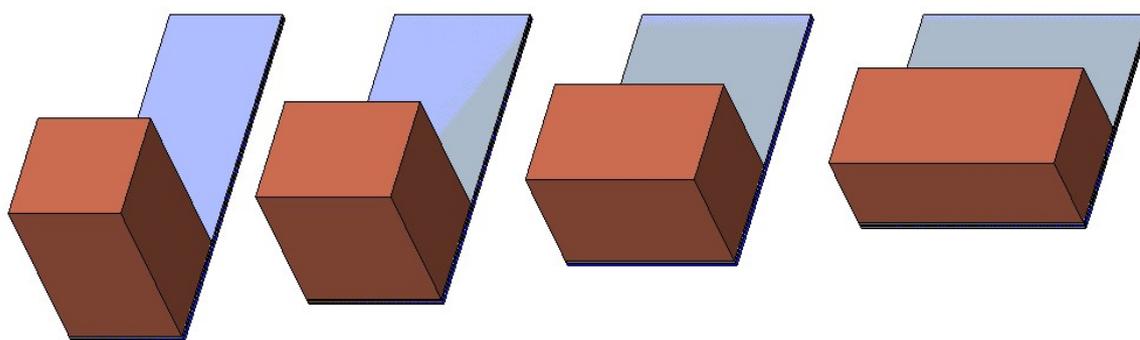
Quatro pares de configurações são avaliados, variando largura e comprimento da viga. A área na direção z de todos os modelos é mantida a mesma, de modo a avaliar o comportamento para um mesmo volume e área de eletrodo do material do transdutor. A massa do material da viga é desconsiderada para fins de análise e a massa da ponta é considerada $m = 4g$, além disso $L_m = 5mm$ em todos os modelos, e a altura da massa h_m varia conforme a largura da viga muda a fim de manter a massa na ponta. A material da massa da ponta é considerada como sendo de tungstênio, com densidade $\rho_m = 19200 \text{ kg/m}^3$ (ASKELAND; WRIGHT, 2014). O comprimento do eletrodo superior e inferior é considerado como sendo $L_e = L$. A configuração analisada está descrita na Tabela 1 e um desenho representativo pode ser visto na Figura 16. O material piezoelétrico considerado é o PZT-5H com uma camada de cobre central, o fabricante Piezo Systems (2021) fornece informação técnicas do material piezoelétrico, descritas na Tabela 2. O modulo de elasticidade do cobre é $E_c = 120 \text{ GPa}$ (BEER; JOHNSTON; DEWOLF, 2006).

Tabela 1 – Configuração de transdutor análise 1

Modelo	Comprimento (L) (mm)	Largura (a) (mm)	Espessura PZT (t_p) (mm)	Espessura metal central (t_c) (mm)	Comprimento da massa (L_m) (mm)
A	12	5	0.139	0.102	5
B	10	6			
C	8	7.5			
D	6	10			

Fonte: O Autor

Figura 16 – Modelos A, B, C e D



Fonte: O Autor

Tabela 2 – Propriedades do material PZT-5H

E_p	50 GPa
k_{31}	0,44
d_{31}	$-320 \cdot 10^{-12} C/N$
$\varepsilon/\varepsilon_0$	3800
σ_{Limite}	20 MPa

Fonte: (PIEZO SYSTEMS, 2021)

As relações utilizadas para avaliar as vigas são descritas a seguir.

Como descrito por Beer et al. (2006), para uma viga em flexão composta de diferentes materiais, como o transdutor analisado, o momento de inércia é representado pelo momento de inércia transformado. A dedução do momento de inércia pode ser vista no Anexo A, e o momento de inércia é dado pela Equação (40).

$$I_x = \frac{a}{12} [t_t^3 + t_c^3(n_t - 1)] \quad (40)$$

onde:

$n_t =$ razão entre modulo de elasticidade do material da camada central e do

material piezoelétrico $n_t = E_c / E_p$

$t_p =$ espessura camada piezoelétrica (m)

$t_c =$ espessura camada metálica central (m)

$t_t =$ espessura total da viga $2t_p + t_c$ (m)

A rigidez de mola da viga transdutora na posição L , pode ser deduzida da curva elástica, a dedução está no Anexo B segundo teoria descrita por Beer et al. (2006). Para a viga da Figura 14, a rigidez K da viga pode ser definida pela Equação (41).

$$K = \frac{EI}{\left(\frac{L^3}{3} + \frac{L_m L^2}{4}\right)} \quad (41)$$

A frequência natural de vibração de cada modelo é estabelecida em *rad/s* pela Equação (42) e a frequência do sistema em *Hertz* é dada pela Equação (43) (RAO, 2009).

$$w_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (42)$$

$$f_n = \frac{w_n}{2\pi} \quad (43)$$

O sistema de vibração do conjunto pode ser visto como um sistema amortecido excitado harmonicamente na base, a fim de analisar as tensões máximas no sistema, considera-se a Equação (44) (RAO, 2009).

$$m\ddot{z} + c_T(\dot{z} - \dot{z}') + K(z - z') = 0 \quad (44)$$

onde:

$c_T =$ coeficiente de amortecimento total

$z =$ posição relativa da massa em relação a posição de equilíbrio

$z' =$ posição da base em relação ao referencial fixo

O sistema está sujeito a uma oscilação na forma da Equação (45), onde Y é a amplitude de oscilação na base,

$$z' = Y \cdot \text{sen}(wt) \quad (45)$$

desenvolvendo a Equação (44), segundo Rao (2009), tem-se as seguintes relações para o movimento do sistema.

$$z(t) = X \sin (wt - \phi) \quad (46)$$

$$X = Y \left[\frac{1 + (2 \cdot \zeta_T r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \zeta_T r)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (47)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{2 \zeta_T r^3}{1 + (4 \zeta_T^2 - 1) r^2} \right] \quad (48)$$

onde:

$X =$ amplitude de movimento em z

$Y =$ amplitude de movimento em z' da base

$r =$ razão entre frequência de oscilação e frequência natural do sistema w/w_n

$\zeta_T =$ razão de amortecimento linear total

A aceleração na base, segundo Rao (2009) é dada através da Equação (49),

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = w^2 Y \sin(wt + \pi) \quad (49)$$

a aceleração máxima, que também é a amplitude de aceleração A_{entra} , se dá quando $\sin(wt + \pi) = 1$, com isso a partir da Equação (49), tem-se que a relação entre a

amplitude de deslocamento da base Y e a amplitude de aceleração da base A_{entra} , se dá pela Equação (50).

$$Y = \frac{A_{entra}}{w^2} \quad (50)$$

Das Equações (46),(47),(48) e (50), tem-se a relação para o movimento dada pela Equação (51).

$$z(t) = \frac{A_{entra}}{w^2} \left[\frac{1 + (2 \cdot \zeta_T r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \zeta_T r)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \sin \left(wt - \tan^{-1} \left[\frac{2 \zeta_T r^3}{1 + (4 \zeta_T^2 - 1) r^2} \right] \right) \quad (51)$$

Por uma análise da Equação (51), pode ser verificado que a deformação máxima z_{Max} se dá segundo a Equação (52). Nota-se que ζ_T se trata do amortecimento total equivalente, mecânico e elétrico, $\zeta_T = \zeta_m + \zeta_e$, onde o amortecimento elétrico equivalente se dá pela Equação (36), para o caso do sistema piezoelétrico conectado a um circuito com resistência. Para o caso do sistema em curto-circuito, tem-se $\zeta_T = \zeta_m$.

$$z_{Max} = \frac{A_{entra}}{w^2} \left[\frac{1 + (2 \cdot \zeta_T r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \zeta_T r)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (52)$$

A tensão normal na viga em flexão é dada pela Equação (53),

$$\sigma = \frac{M(y)z}{I_x} \quad (53)$$

o momento fletor é dado pela Equação (68) do Apêndice B e visto que se tem tensão máxima quando na extremidade da viga, ou seja $z = t_t/2$, a relação para tensão normal pode ser dada pela Equação (54):

$$\sigma = \frac{F_{massa} \left(L + \frac{L_m}{2} - y \right) t_t}{2I_x} \quad (54)$$

da Equação (78) do Apêndice B, sendo $z(L) = z_{Max}$, tem-se a Equação (55) para a tensão mecânica máxima ao longo do comprimento da viga

$$\sigma = \frac{K \cdot z_{Max} \cdot (L + \frac{L_m}{2} - y) t_t}{2I_x} \quad (55)$$

da Equação (52) e para $y = 0$, tem-se então a tensão máxima na viga dada pela Equação (56).

$$\sigma_{Max} = \frac{A_{entra} K (L + \frac{L_m}{2}) t_t}{2I_x w^2} \sqrt{\frac{1 + (2 \cdot \zeta_T r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \zeta_T r)^2}} \quad (56)$$

Da equação de potência elétrica de saída proposta por Roundy (2003), reescrita por conveniência na Equação (57), tem-se a resposta de potência do sistema para a condição $w = w_n$, assim as análises são feitas para esta condição de cada modelo.

$$P = \frac{1}{w^2} \cdot \frac{RC^2 \left(\frac{Y_c d_{31} t_p b^*}{\varepsilon} \right)^2}{(4\zeta_m^2 + k^4)(RCw)^2 + 4\zeta_m k^2(RCw) + 2\zeta_m^2} A_{entra}^2 \quad (57)$$

O coeficiente de amortecimento mecânico é considerado como sendo $\zeta_m = 0,02$ para fins de análise, o que é plausível, visto que os valores observados por Roundy (2003) são desta ordem. Idealmente, este deve ser testado, para valores quantitativos mais assertivos.

As relações aqui citadas são avaliadas junto aos dados do sistema e materiais através do Scilab, a fim de se obter resultados e então avaliação. A amplitude de aceleração considerada é $A_{entra} = 2,25 \text{ m/s}^2$.

A equação para potência foi testada com uma das condição de contorno otimizadas propostas por Roundy (2003) ,Figura 17, e foram obtidos valores bastante parecidos, Figura 18, para potência x resistência, o que diz que a função foi aplicada

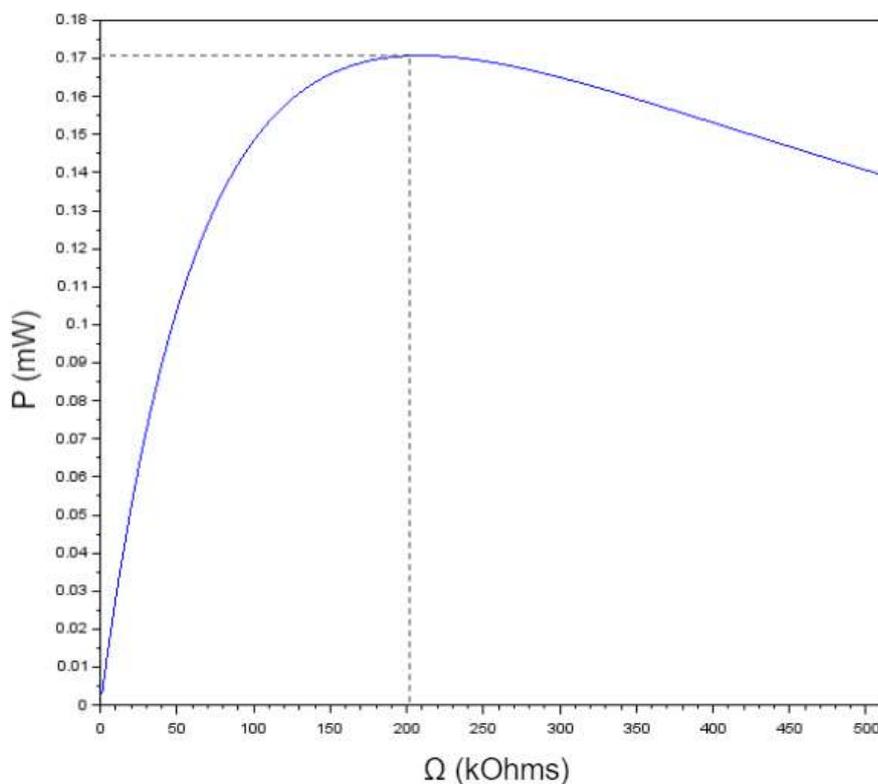
da forma correta no Scilab. Tem-se um comportamento correspondente, visto que a intenção de uso da função potência é a análise comparativa entre os modelos A, B, C e D, esta é satisfatória.

Figura 17 – Condição de contorno de uma viga piezoelétrica para teste de equação

Variables	Optimized Value	Range Allowed
l_m	8.5 mm	$l_m + l_b < 1.5$ cm
h_m	7.7 mm	$h_m \leq 7.7$ mm
w_m	6.7 mm	All, subject to total volume constraint
l_b	6.5 mm	$l_m + l_b < 1.5$ cm
w_b	3 mm	All, subject to total volume constraint
l_e	6.5 mm	All, subject to above constraint
t_p	0.139 mm	$t_p = 0.139$ mm
t_{sh}	0.102 mm	$t_{sh} = 0.1016$
R_{load}	200 k Ω	All greater than zero
P_{out}	215 μ W	

Fonte: (ROUNDY, 2003)

Figura 18 – Resposta para a condição de contorno de teste da função potência.

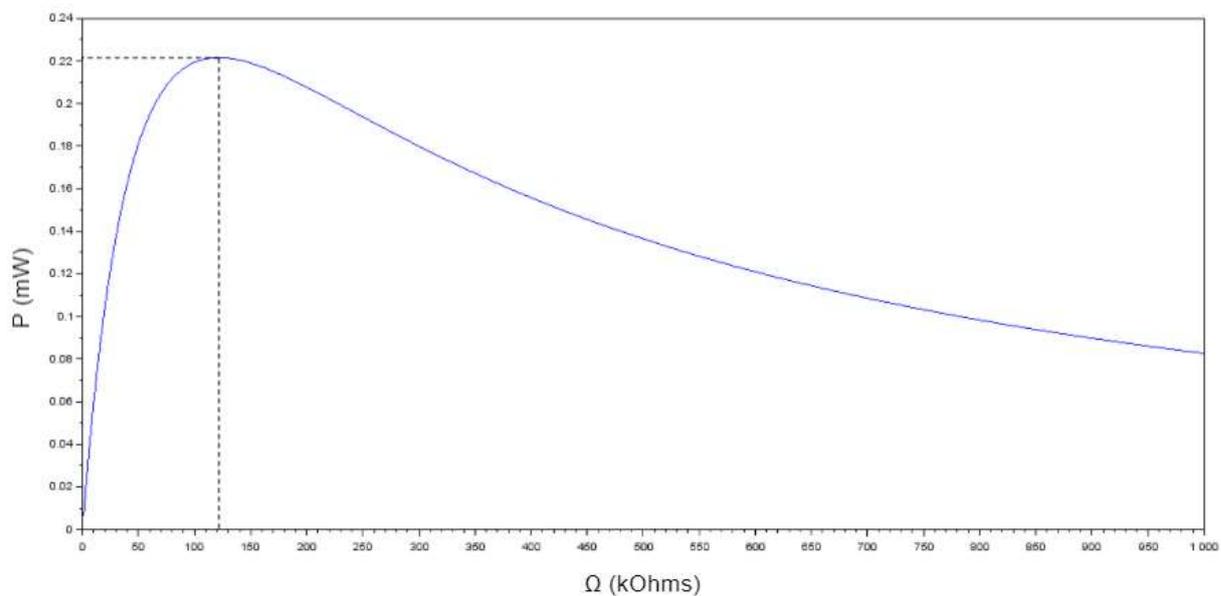


Fonte: O Autor

3.3. Resultados

Modelo A

Figura 19 – Resposta de potência Modelo A

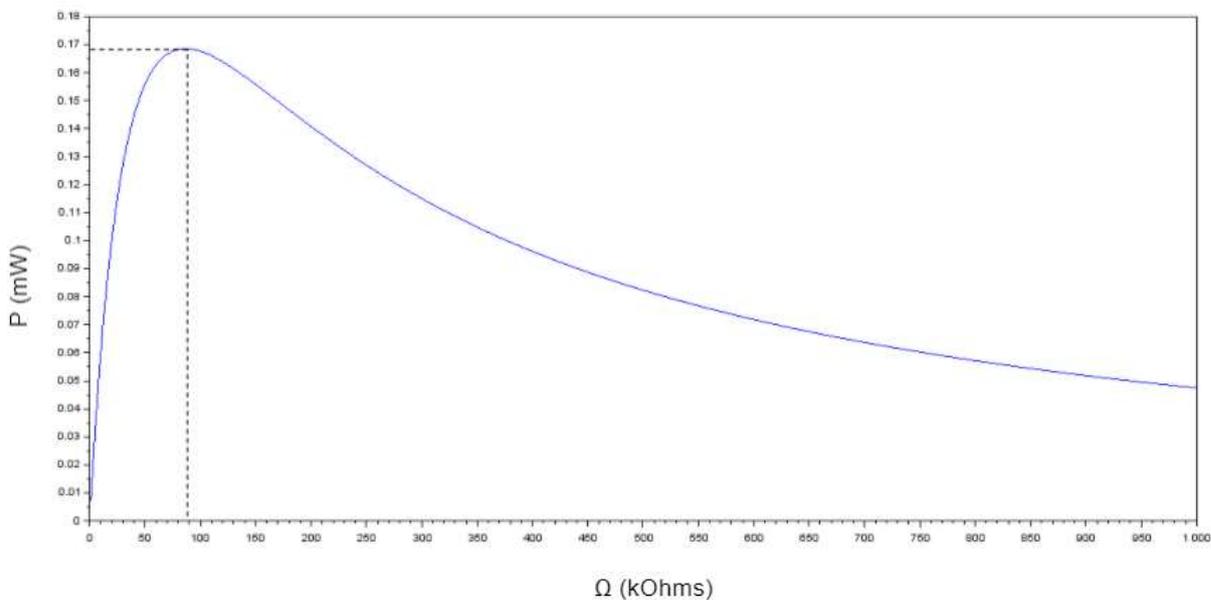


Fonte: O Autor

O ponto de operação ideal para o modelo se dá a uma resistência elétrica da ordem de 120 kOhms , com potência correspondente de $0,22\text{ mW}$. Nesta condição para o sistema, a tensão normal máxima observada é $14,8\text{ MPa}$. No caso de o sistema se encontrar em curto-circuito, e a viga vibrar sem a parcela do amortecimento elétrico, a tensão normal máxima observada é $26,4\text{ MPa}$, também inferior ao limite de resistência.

Modelo B

Figura 20 – Resposta de potência Modelo B

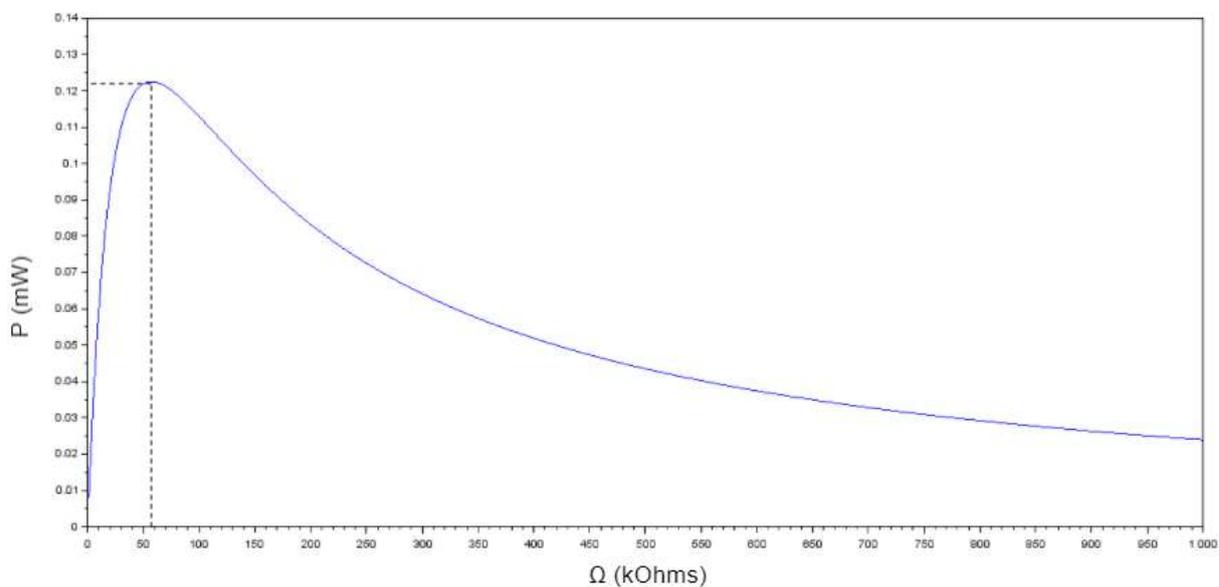


Fonte: O Autor

Resposta de potência da ordem de $0,17 \text{ mW}$, para uma resistência elétrica associada de 90 kOhms . Nesta condição para o sistema, a tensão normal máxima observada é $10,6 \text{ MPa}$. No caso de o sistema se encontrar em curto-circuito, e a viga vibrar sem a parcela do amortecimento elétrico, a tensão normal máxima observada é 19 MPa , também inferior ao limite de resistência.

Modelo C

Figura 21 – Resposta de potência Modelo C

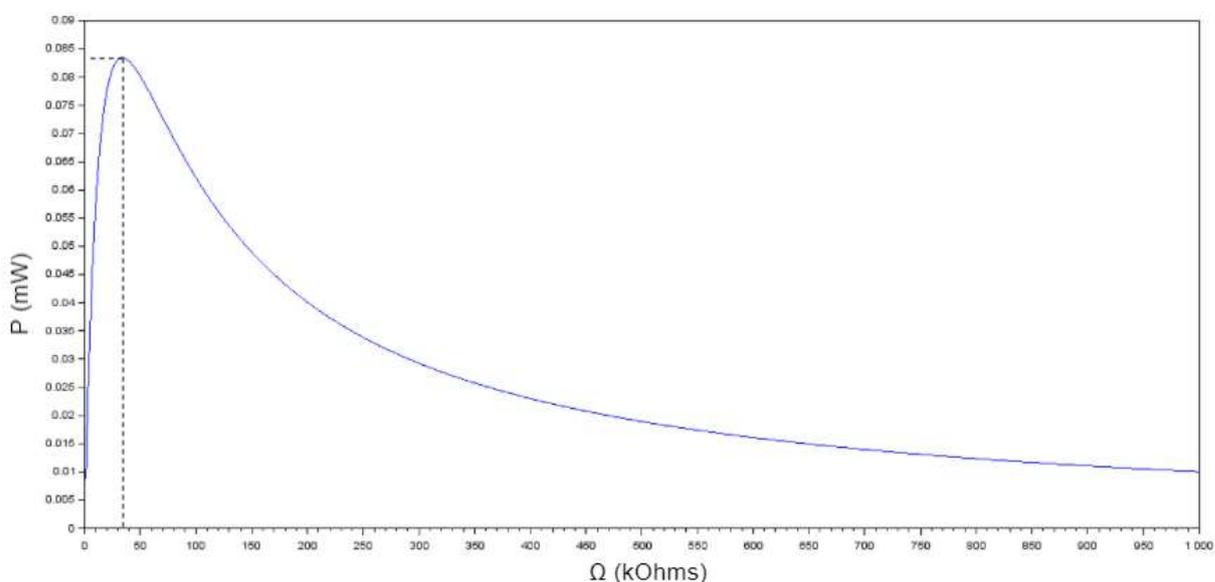


Fonte: O Autor

Resposta de potência da ordem de $0,12 \text{ mW}$, para uma resistência elétrica associada de 60 kOhms . Nesta condição para o sistema, a tensão normal máxima observada é 7 MPa . No caso de o sistema se encontrar em curto-circuito, e a viga vibrar sem a parcela do amortecimento elétrico, a tensão normal máxima observada é $12,8 \text{ MPa}$, também inferior ao limite de resistência.

Modelo D

Figura 22 – Resposta de potência Modelo D



Fonte: O Autor

Resposta de potência da ordem de $0,083 \text{ mW}$, para uma resistência elétrica associada de 35 kOhms . Nesta condição para o sistema, a tensão normal máxima observada é $4,3 \text{ MPa}$. No caso de o sistema se encontrar em curto-circuito, e a viga vibrar sem a parcela do amortecimento elétrico, a tensão normal máxima observada é $7,75 \text{ MPa}$, também inferior ao limite de resistência.

4. CONCLUSÃO

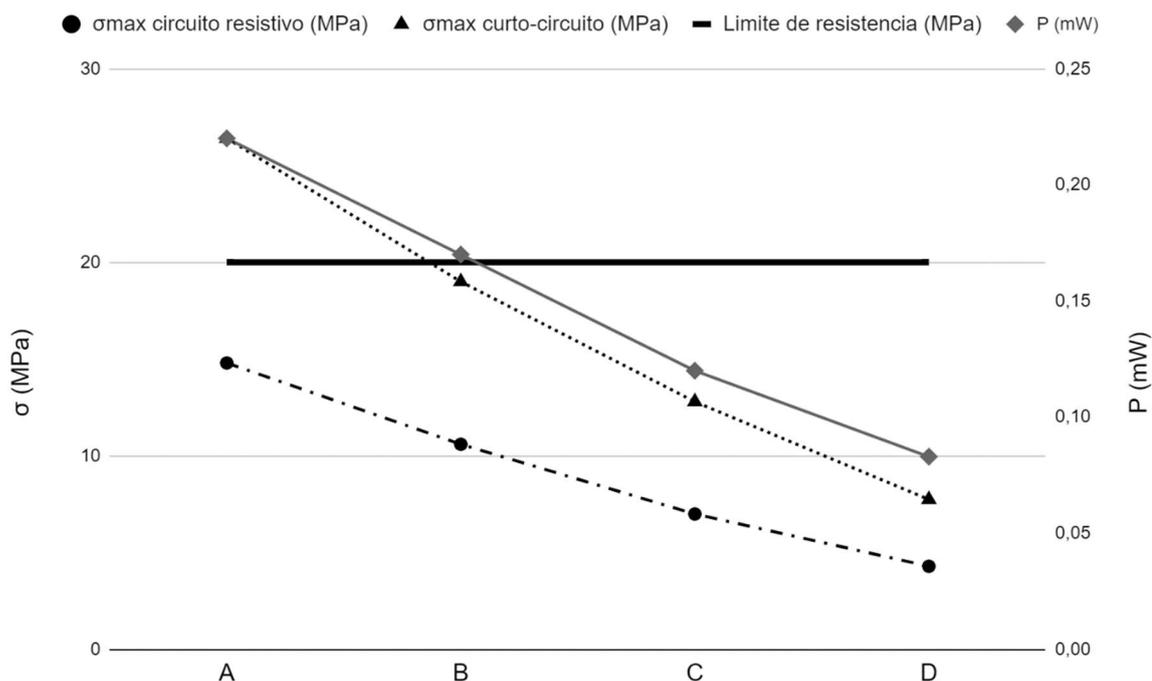
Como pode ser observado na Figura 23, a resposta de potência diminui consideravelmente do Modelo A para o Modelo D, o que é esperado visto que, como pode ser observado, tensões maiores estão atuando em A, e a capacidade do material piezoelétrico de gerar potência está diretamente relacionada com a tensão mecânica média atuando no material transdutor.

Um parâmetro importante no design de vigas transdutoras e que deve ser considerado são as tensões mecânicas de operação para sistema operando com circuito em curto e não somente com circuito resistivo (onde há conversão de energia mecânica em elétrica). Por um lado, para fins de geração de energia, é preciso ter a maior tensão mecânica possível atuando no material durante sua operação conectado ao sistema resistivo (em que energia é retirada do sistema vibracional e convertida em energia elétrica), o que é observado no Modelo A, por exemplo com tensão máxima de $14,8 \text{ MPa}$, porém para o caso de o sistema estar em curto, um problema pode ser observado, visto que a tensão mecânica máxima no modelo é da ordem de $26,4 \text{ MPa}$, o que é superior ao limite de resistência do material piezoelétrico de 20 MPa , notando que se trata apenas da tensão normal, sem considerar as tensões cisalhantes. Isto leva a conclusão de que para manter a integridade do material durante possíveis operações no qual o sistema está em curto, deve-se renunciar ao total aproveitamento do potencial de geração de energia dele, que se dá no estado de operação com maior tensão mecânica média possível.

O Modelo B, atua com tensões abaixo do limite de resistência do material piezoelétrico operando com circuito resistivo, tensão mecânica máxima de $10,6 \text{ MPa}$, e ligeiramente abaixo do limite de resistência para a situação de curto-circuito 19 MPa . Obviamente deve-se considerar fatores de fadiga para a especificação de um elemento transdutor, porém, neste caso já se pode observar que o modelo estaria abaixo do limite nominal de resistência mecânica. Tem-se uma resposta de potência menor, pelo mesmo princípio da correspondência de potência com tensão média no material. A redução pode ser vista como sendo da ordem de 29% entre os dois modelos. Os modelos subsequentes seguem a mesma tendência, porém com capacidade de geração de energia elétrica bastante comprometidas, o que novamente, está associado as baixas tensões no modelo, que possuem maior rigidez. Uma forma de otimizar o transdutor seria, talvez, um desenho de viga não retangular,

com secção transversal variável, a fim de manter as tensões mecânicas ao longo da viga mais próximas da tensão média, deste modo, é possível ter uma tensão mecânica de operação média maior, ainda mantendo a máxima abaixo do limite considerando os fatores de segurança.

Figura 23 – Gráfico de resultados



Fonte: O Autor

Com as pesquisas e análises realizadas neste trabalho, alguns tópicos podem ser abordados em trabalhos futuros. Uma possibilidade é realizar uma análise semelhante com testes laboratoriais de vigas piezoelétricas, para verificação física da relação tensão de trabalho como circuito resistivo e com circuito em curto, e possíveis falhas. Outra possibilidade interessante, que provém de uma das ideias iniciais que levaram a esta análise, é estudar o comportamento vibracional de uma placa piezoelétrica exposta a chuvas de diferentes intensidades, e diferentes ângulos de incidência, e as respostas elétricas obtidas.

REFERÊNCIAS

ANEEL. **Sistema de Informações de Geração da ANEEL - SIGA**. Disponível em: <<https://www.aneel.gov.br/siga>>. Acesso em: 13 fev. 2020.

ASKELAND, D. R.; WRIGHT, W. J. **Ciência e Engenharia dos Materiais**. 3. ed. São Paulo: Trilha, 2014.

BEER, F.; JOHNSTON, R.; DEWOLF, J. **Resistência dos Materiais - Mecânica dos Materiais**. 5. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2006.

IEA. **Electricity Information: Overview**. Disponível em: <<https://www.iea.org/reports/electricity-information-overview>>. Acesso em: 10 fev. 2021.

IEEE. **IEEE Standard on Piezoelectricity**. New York: 1987

IKEDA, T. **Fundamentals of Piezoelectricity**. New York: Oxford University Press, 1996.

KÜHNBACH, M. et al. **How much energy autonomy can decentralised photovoltaic generation provide? A case study for Southern Germany** *Applied Energy*, 2020.

MIAO, Y.; JIA, Y. Hybrid decentralised energy for remote communities: Case studies and the analysis of the potential integration of rain energy. **Journal of Sustainable Development of Energy, Water and Environment Systems**, v. 2, n. 3, p. 243–258, 2014.

PAPAGIANNAKIS, A. T. et al. **Energy Harvesting from Roadways**. *Procedia Computer Science*. **Anais...Elsevier B.V.**, 1 jan. 2016

PIEZO SYSTEMS. **Materials Technical Data (Typical Values)**. Disponível em: <<https://piezo.com/>>. Acesso em: 3 abr. 2021.

RAO, S. **Vibrações Mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

ROUNDY, S. J. **Energy Scavenging for Wireless Sensor Nodes with a Focus on Vibration to Electricity Conversion**. [s.l.] University of California, Berkeley, 2003.

SCIENCING. **What Are Piezoelectric Materials?** Disponível em: <<https://sciencing.com/piezoelectric-materials-8251088.html>>.

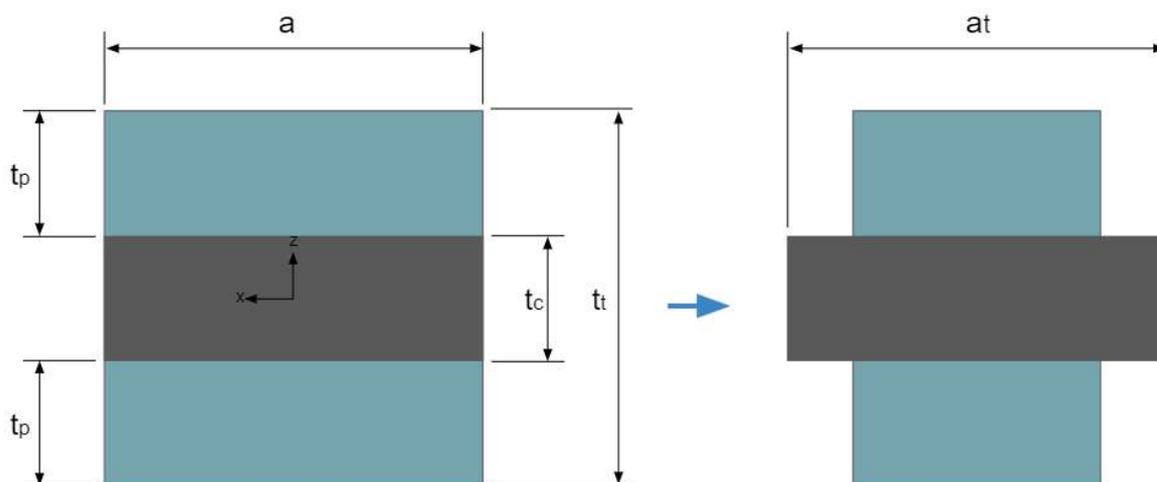
WILLIAMS, C. B.; YATES, R. B. Analysis of a micro-electric generator for microsystems. **Sensors and Actuators A: Physical**, v. 52, n. 1–3, p. 8–11, 1 mar. 1996.

WU, N.; BAO, B.; WANG, Q. **Review on engineering structural designs for efficient piezoelectric energy harvesting to obtain high power output** *Engineering Structures* Elsevier Ltd, , 15 maio 2021.

ANEXO A – MOMENTO DE INÉRCIA DE VIGA COMPOSTA

O momento de inercia transformado de uma viga composta por dois materiais pode ser calculado usando – se o momento de inercia transformado (BEER; JOHNSTON; DEWOLF, 2006).

Figura 24 – Seção de viga composta transformada



Fonte: O Autor

Sendo n_t a razão entre o módulo de elasticidade do material piezoelétrico e o módulo de elasticidade do material da camada do centro, Equação (58), o momento de inercia se dá como segue.

$$n_t = \frac{E_c}{E_p} \quad (58)$$

A dimensão a transformada para o material piezoelétrico a_t é segundo a Equação (59).

$$a_t = n_t \cdot a \quad (59)$$

O momento de inércia I_x total é composto então por 3 partes de área, sendo a metade inferior e superior de material piezoelétrico e a parte central de metal, assim o momento de inércia para a secção transformada da Figura 24 a direita é dado pela Equação (60).

$$I_x = \int_{\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_t}{2}} a \cdot z^2 dz + \int_{-\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2}} a_t \cdot z^2 dz + \int_{-\frac{t_t}{2}}^{-\frac{t_c}{2}} a \cdot z^2 dz \quad (60)$$

onde:

$t_t = \text{espessura total da viga } 2t_p + t_c$

Resolvendo as integrais, tem-se,

$$I_x = \left[a \cdot \frac{z^3}{3} \right]_{\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_t}{2}} + \left[a_t \cdot \frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2}} + \left[a \cdot \frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{t_t}{2}}^{-\frac{t_c}{2}} \quad (61)$$

$$I_x = a \left[\frac{t_t^3}{24} - \frac{t_c^3}{24} - \frac{t_c^3}{24} + \frac{t_t^3}{24} \right] + a_t \left[\frac{t_c^3}{24} + \frac{t_c^3}{24} \right] \quad (62)$$

$$I_x = a \left[\frac{t_t^3}{12} - \frac{t_c^3}{12} \right] + a_t \frac{t_c^3}{12} \quad (63)$$

$$I_x = \frac{a_t}{12} \cdot t_c^3 + \frac{a}{12} [t_t^3 - t_c^3] \quad (64)$$

Substituindo a Equação (59) na Equação (64), tem-se,

$$I_x = \frac{n_t \cdot a}{12} \cdot t_c^3 + \frac{a}{12} [t_t^3 - t_c^3] \quad (65)$$

Assim, o momento de inercia é dado pela Equação (66).

$$I_x = \frac{a}{12} [t_t^3 + t_c^3(n_t - 1)] \quad (66)$$

ANEXO B – RIGIDEZ K DE VIGA ENGASTADA

Segundo Beer et al. (2006), a equação da curva elástica para uma viga é descrita segundo a Equação (67), e o momento fletor atuando na viga da Figura 14 $M(y)$ é relacionado pela Equação (68), onde F_{massa} é a força exercida na massa da ponta, juntando as duas últimas, tem-se a Equação (69),

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{M(y)}{EI} \quad (67)$$

$$M(y) = F_{massa}\left(L + \frac{L_m}{2} - y\right) \quad (68)$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{F_{massa}\left(L + \frac{L_m}{2} - y\right)}{EI} \quad (69)$$

integrando a Equação (69), tem-se,

$$\frac{dz}{dy} = \int \frac{F_{massa}\left(L + \frac{L_m}{2} - y\right)}{EI} dy = \frac{F_{massa}\left(Ly + \frac{L_my}{2} - \frac{y^2}{2}\right)}{EI} + C_1 \quad (70)$$

e aplicando a condição de contorno $y = 0$; $dz/dy = 0$, tem-se,

$$0 = \frac{F_{massa}\left(L \cdot 0 + \frac{L_m \cdot 0}{2} - \frac{0^2}{2}\right)}{EI} + C_1 \rightarrow C_1 = 0 \quad (71)$$

integrando novamente a Equação (70), tem-se,

$$z(y) = \int \frac{F_{massa}\left(Ly + \frac{L_my}{2} - \frac{y^2}{2}\right)}{EI} \quad (72)$$

$$z(y) = \frac{F_{massa}\left(\frac{Ly^2}{2} + \frac{L_my^2}{4} - \frac{y^3}{6}\right)}{EI} + C_2 \quad (73)$$

e aplicando a condição de contorno $y = 0$; $z = 0$, tem-se,

$$0 = \frac{F_{massa} \left(\frac{L0^2}{2} + \frac{L_m 0^2}{4} - \frac{0^3}{6} \right)}{EI} + C_2 \rightarrow C_2 = 0 \quad (74)$$

logo, a deflexão da viga pode ser dada pela Equação (75),

$$z(y) = \frac{F_{ponta} \left(\frac{Ly^2}{2} + \frac{L_m y^2}{4} - \frac{y^3}{6} \right)}{EI} \quad (75)$$

e para a posição L na viga, tem-se,

$$z(L) = \frac{F_{massa} \left(\frac{L(L)^2}{2} + \frac{L_m (L)^2}{4} - \frac{(L)^3}{6} \right)}{EI} \quad (76)$$

$$z(L) = \frac{F_{massa} \left(\frac{L^3}{3} + \frac{L_m L^2}{4} \right)}{EI} \quad (77)$$

Pela lei de Hook, temos que a rigidez de mola é dada pela Equação (78),

$$K = \frac{F_{massa}}{z(L)} \quad (78)$$

da junção das Equações (77) e (78), tem-se Equação (80) para rigidez da viga em L . Sendo E o modulo de elasticidade do material piezoelétrico.

$$K = \frac{F_{massa}}{\left[\frac{F_{massa} \left(\frac{L^3}{3} + \frac{L_m L^2}{4} \right)}{EI} \right]} = \frac{EI}{\left(\frac{L^3}{3} + \frac{L_m L^2}{4} \right)} \quad (79)$$

$$K = \frac{EI}{\left(\frac{L^3}{3} + \frac{L_m L^2}{4} \right)} \quad (80)$$